

Bose-Einsteincondensaten & vortices

- ▶ Sterk afkoelen van een ijl gas van bosonen verhoogt de onzekerheid op de positie zodat de golfpakketten gaan overlappen. De bosonen, allen in de grondtoestand gedragen zich als een geheel. Ze komen in een nieuwe aggregatietoestand terecht: een Bose-Einsteincondensaat (BEC). In een BEC is de circulatie $\kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ gekwantiseerd, wat volgt uit de Gross-Pitaevskii-vergelijking die BEC's beschrijft. [1]
- ▶ Rotatie van de val heeft discrete invloed, er vormen zich een geheel aantal vortices met $\kappa = \frac{h}{m}$.
- ▶ Grenzen tussen stabiel regime met $l - 1$ of l vortices: kritische frequentie $\omega_c^{(l)}$.
- ▶ $\omega_c^{(1)}$ valt analytisch te berekenen, de hogere kritische frequenties niet.

Doelstellingen

1. De kritische frequenties bepalen bij stijgende ω
 2. De kritische frequenties bepalen bij dalende ω
 3. De stabiele configuratie bestuderen bij meerdere vortices.
- Er wordt hierbij uitgegaan van een 2D, homogeen, schijfvormig condensaat.

Aanpak

1. Bewegingsvergelijkingen van vortices in een roterend condensaat opstellen en aanpassen voor numerieke berekeningen.
2. Implementatie voor bepaling kritische frequenties.
3. Stabiele eindtoestand van een simulatie zoeken.

Bewegingsvergelijkingen

- ▶ Magnuskracht op vortex k in achtergrond met snelheid \mathbf{v}_b :

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{t}) = \rho \kappa \times (\mathbf{v}_b(\mathbf{r}_k, \mathbf{t}) - \mathbf{v}_k(\mathbf{t})). \quad (1)$$

\mathbf{v}_b is de som van verschillende termen:

- ▶ Rotatie van de val:

$$\mathbf{v}_{b,\omega} = -\omega \times \mathbf{r}. \quad (2)$$

- ▶ Stroming van andere vortices:

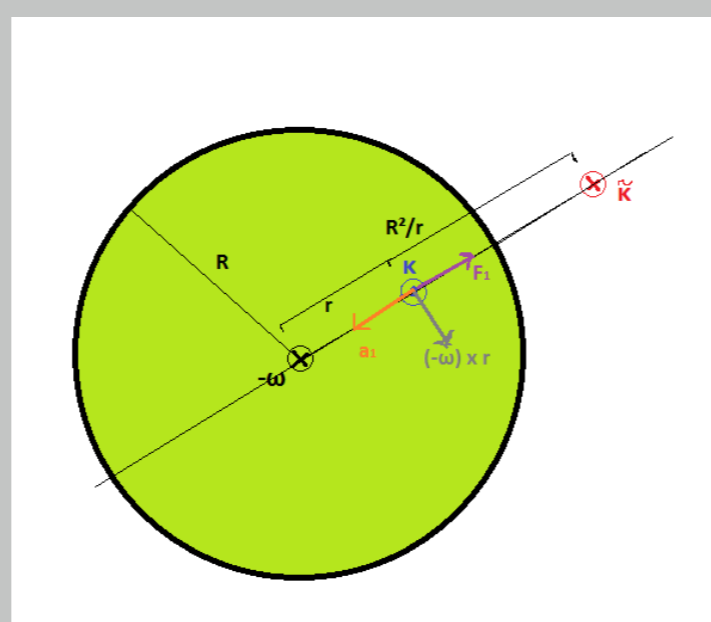
$$\mathbf{v}_{b,j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa_j \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (3)$$

- ▶ Randvoorwaarde: geen condensaat uit de val. Ze wordt in rekening gebracht via virtuele beeldvortices op

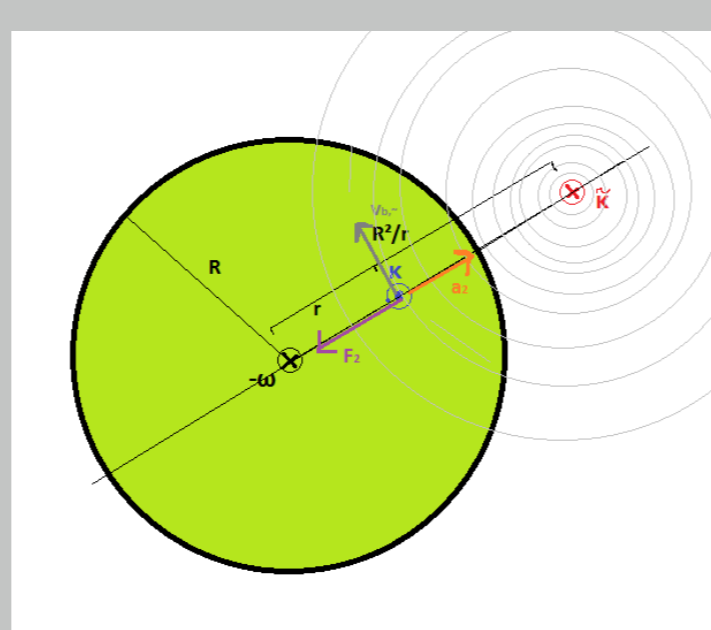
$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{R^2}{|\mathbf{r}|} \mathbf{e}_r \quad (4)$$

met circulatie $\tilde{\kappa} = -\kappa$. Ook hun stromingsveld voldoet aan (3) en draagt bij tot \mathbf{v}_b .

- ▶ Dampingsterm $-\lambda \mathbf{v}_k$
- ▶ Uit de tweede wet van Newton volgt de versnelling $\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k / m_{\odot}$, $-m_{\odot}$ is de massa aan condensaat dat op de vortex ontbreekt ten opzichte van de achtergrond. De vortex wordt benaderd als een schijf met straal ξ .
- ▶ Vergelijkingen worden gediscretiseerd in tijd, \mathbf{r}, \mathbf{v} en \mathbf{a} worden geprojecteerd op x - en y -as. Uitgaande van beginvoorwaarden positie en snelheid van de vortices op $t=0$ worden de variabelen per tijdsstap τ berekend.



Figuur 1: rotatie van de val



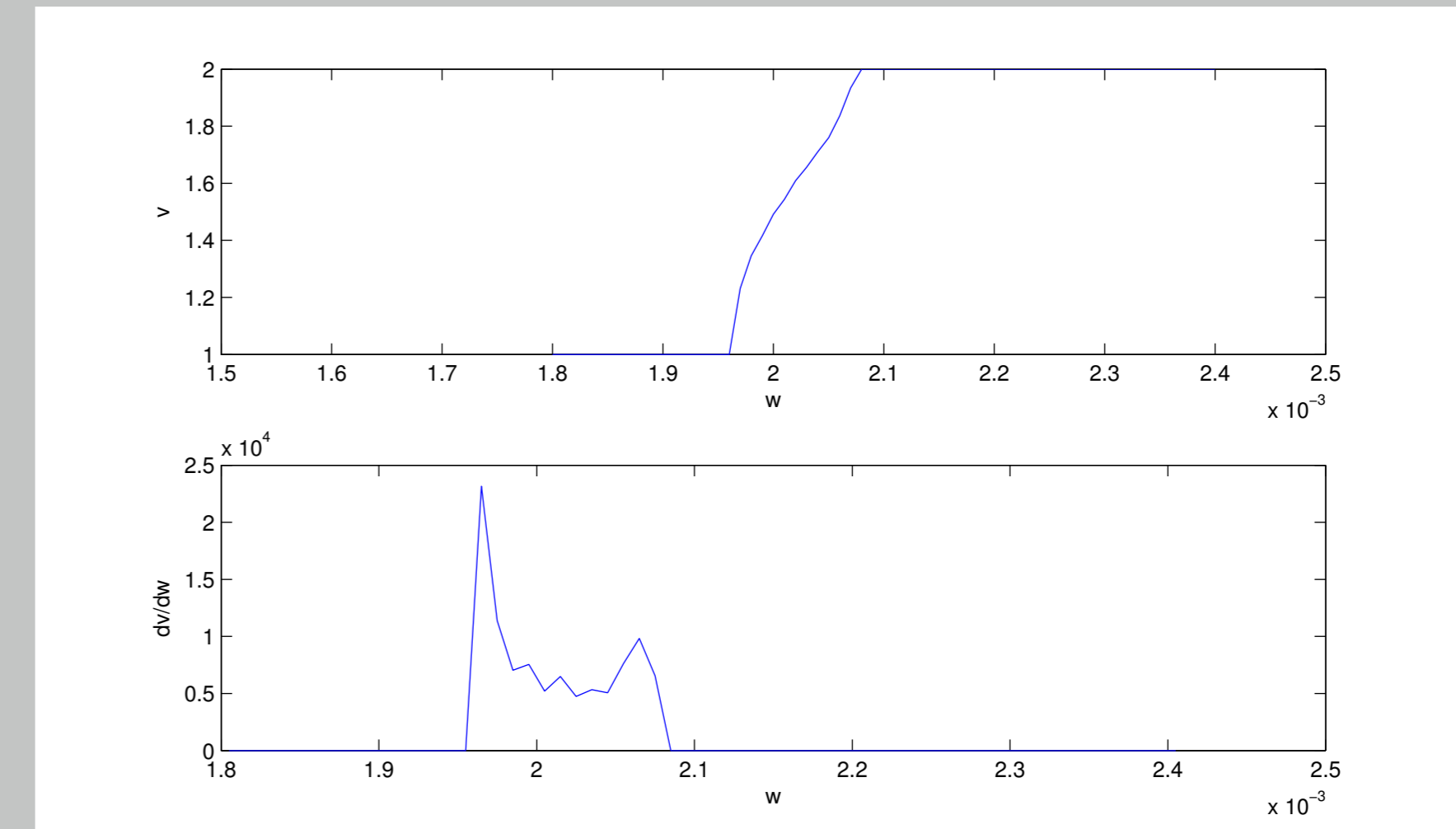
Figuur 2: de beeldvortex

Bepaling van kritische frequenties

- ▶ $\omega_c^{(1)}$ bij stijgen: Genereer random vortex op $|\mathbf{r}| = R - 1.5\xi$ en loop simulatie l tijdstappen. Hierin kan elke stap een vortex verdwijnen als die dichter dan ξ bij de rand komt. Tel na l stappen de overgebleven vortices.
- ▶ $\omega_c^{(l>1)}$ bij stijgen: Begin van eindtoestand met $l - 1$ vortices en voeg random vortex aan de rand toe, verder analoog aan $\omega_c^{(1)}$.
- ▶ $\omega_c^{(l)}$ bij dalen: Ga uit van eindtoestand met l vortices en verder analoog.
- ▶ Telkens N keer herhalen en aantal overgebleven vortices uitmiddelen.
- ▶ ω variëren in stapjes $\Delta\omega$

Resultaten

- ▶ Parameters: $\xi = \kappa = 1$ bepalen ijk voor hoeksnelheid $\hbar / (m\xi^2)$, $R = 30$, $\lambda = 0.1$, $\tau = 0.1$, $l = 10^5$.
- ▶ Het gemiddeld aantal overgebleven vortices \mathbf{v} en $d\mathbf{v}/d\omega$ wordt uitgezet als functie van ω .



Figuur 3: $\mathbf{v}(\omega)$ en $d\mathbf{v}/d\omega(\omega)$ voor bepaling van $\omega_c^{(2)}$ in het stijgend geval met $N = 10^4$, $\Delta\omega = 10^{-5}$.

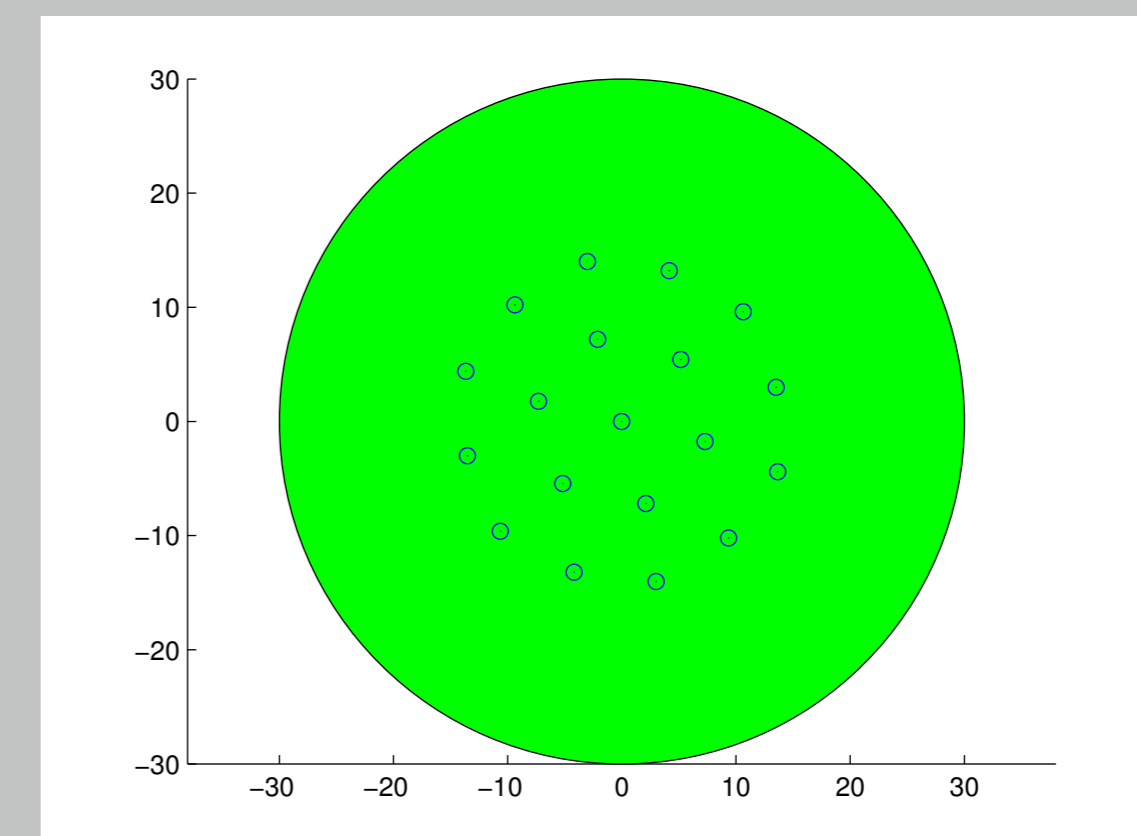
- ▶ Grenzen van de overgangsgebieden worden bepaald.

l	$\omega_{c,\min}^{(l)}$	$\omega_{c,\max}^{(l)}$	$\omega_{c,\min}^{(l)}$	$\omega_{c,\max}^{(l)}$
1	0.00181*	0.00182*	0.0018	0.0019
2	0.00196*	0.00208*	0.0019	0.0021
3	0.0021	0.0024	0.0020	0.0024
4	0.0023	0.0025	0.0022	0.0026
5	0.0025	0.0027	0.0023	0.0028

Tabel 1: Grenzen van de overgangsgebieden voor $1 \leq l \leq 5$ bij stijgende en dalende ω in eenheden $\hbar / (m\xi^2)$. *: Deze waarde werd verkregen bij $N = 10^4$, $\Delta\omega = 10^{-5}$. De overige waarden bij $N = 100$, $\Delta\omega = 10^{-4}$.

Vortexconfiguratie

- ▶ Simulatie met vele aan de rand gegenereerde vortices wordt uitgevoerd.



Figuur 4: stabiele toestand met 19 vortices bij $\omega = 0.01$ (niet op ware grootte).

- ▶ Vortices streven naar driehoekig patroon in het centrum.
- ▶ Het rooster groeit van binnen naar buiten en het maximum aantal wordt bereikt aan de rand van de val.
- ▶ Bij hogere ω daalt de vortex-vortexafstand.

Discussie en Conclusie

- ▶ Er is een overgangsgebied aanwezig in het aantal vortices.
- ▶ De bekomen eerste kritische frequentie bedraagt de helft van theoretische waarde.
- ▶ Hysteresis blijkt aanwezig.
- ▶ Het verloop is kwalitatief in overeenkomst met experiment [2]. $\omega_c^{(2)}/\omega_c^{(1)}$ verhouding 1.11 vs 1.08.
- ▶ Vortices ordenen zich in een driehoekig rooster.
- ▶ Gemaakte benaderingen: cilindrisch, homogeen condensaat met vortices als puntdeeltjes met massa alsof ze cilindrisch zijn.

Referenties

- [1] J.F. Annett. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oms in cmp. Oxford University Press, 2004.
- [2] K.W. Madison, F. Chevy, W Wohlleben, and J Dalibard. Vortex formation in a stirred bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 84(5):806–809, 2000.